

## Метод квазиинвариантов при построении схемы CABARET и его применение для численного расчета уравнений газовой динамики

В. А. Колотилов<sup>1,2,3,\*</sup>, В. В. Остапенко<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Колотилов Вадим Алексеевич, e-mail: kolotilov1992@gmail.com

Поступила 13 июля 2022 г., доработана 25 ноября 2022 г., принята в печать 20 декабря 2022 г.

Приводится детальное описание метода квазиинвариантов при построении схемы CABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения, не допускающую записи в форме инвариантов. В качестве примера рассмотрена система уравнений неизоэнтропической газовой динамики, для которой квазиинварианты получаются из классической характеристической формы записи этой системы. В результате построены три различных семейства квазиинвариантов, каждому из которых соответствует своя модификация схемы CABARET. Проведен сравнительный анализ точности этих модификаций при расчете задачи Сода о распаде разрыва в политропном газе. На основе этого анализа выделен оптимальный вид квазиинвариантов, позволяющий схеме CABARET с высокой точностью локализовать разрывы разной природы.

*Ключевые слова:* схема CABARET, метод квазиинвариантов, уравнения газовой динамики.

*Цитирование:* Колотилов В.А., Остапенко В.В. Метод квазиинвариантов при построении схемы CABARET и его применение для численного расчета уравнений газовой динамики. Вычислительные технологии. 2023; 28(2):58–71. DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.006.

### Введение

Стандартный алгоритм схемы CABARET [1], аппроксимирующий гиперболическую систему законов сохранения, предполагает, что эта система допускает запись в форме инвариантов. В этом случае монотонные модификации схемы CABARET [2–5] позволяют с высокой точностью локализовать как сильные, так и слабые разрывы точного решения, возникающие, в частности, при численном решении системы законов сохранения первого приближения теории мелкой воды [6]. Однако, если гиперболическая система не допускает записи в форме инвариантов, то для построения схемы CABARET, аппроксимирующей эту систему, необходимо применять квазиинварианты, которые в общем случае определяются неоднозначно [1].

Наиболее простой метод построения квазиинвариантов связан с использованием инвариантов линейных систем, получаемых путем линеаризации аппроксимируемой квазилинейной системы законов сохранения в каждой пространственно-временной ячейке разностной сетки. Этот метод подробно описан в [7] и широко применяется при построении различных классов разностных схем сквозного счета повышенной точности, в частности WENO-схем [8]. Поскольку в рамках данного метода квазиинварианты внутри каждой элементарной ячейки разностной сетки являются линейными функциями базисных переменных, будем использовать термин “линейные квазиинварианты”.

Линейные квазиинварианты применяются в [1] как основные при построении схемы CABARET, аппроксимирующей систему уравнений неизоэнтропической газовой динамики [7, 9]. Эти квазиинварианты получаются путем линеаризации недивергентной формы записи системы газодинамических уравнений относительно функций плотности, скорости и давления. В случае политропного газа предлагаются две модификации схемы CABARET, которые используют нелинейные квазиинварианты, получаемые в рамках предположения, что внутри каждой элементарной ячейки разностной сетки постоянны плотность газа (изохорические квазиинварианты) или энтропия газа (изоэнтропические квазиинварианты). Однако в [1] не приведена методика получения нелинейных квазиинвариантов при построении схемы CABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения общего вида, и не рассмотрено применение этой методики для уравнений газовой динамики. Кроме того, в [1] не указаны результаты тестирования полученных модификаций схемы CABARET при численном решении стандартных задач Римана [10] о распаде начальных газодинамических разрывов, что является необходимым условием для оценки эффективности предлагаемых численных алгоритмов.

В [11] дано краткое описание метода построения нелинейных квазиинвариантов для схемы CABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения общего вида. Применение этого метода вместе с дополнительной коррекцией потоков обеспечивает монотонизацию разностного решения при расчете разрывных решений с ударными волнами и контактными разрывами. Тестовые расчеты начально-краевой газодинамической задачи Blast Wave показали, что предлагаемая схема, в которой применяются изохорические квазиинварианты [1], подавляет нефизические осцилляции, приводящие к неустойчивости разностного решения при расчете по схеме CABARET, в которой дополнительная коррекция потоков отсутствует. В [11] рассмотрен частный случай, когда квазиинварианты находятся в результате интегрирования дифференциальных форм, получаемых из основной недивергентной формы записи гиперболической системы, зависящей от базисных переменных аппроксимируемой системы законов сохранения.

В настоящей работе изучается общий случай построения квазиинвариантов на основе произвольной недивергентной формы записи аппроксимируемой гиперболической системы законов сохранения. Дана классификация квазиинвариантов относительно их нелинейной зависимости от искомым функций соответствующей недивергентной системы и описан способ получения квазиинвариантов заданного порядка нелинейности. Алгоритм получаемой схемы CABARET приводится для случая, когда в рассчитываемом точном решении характеристики одного семейства являются однонаправленными, т. е. скорости распространения этих характеристик не меняют знак.

В качестве примера рассмотрена система законов сохранения неизоэнтропической газовой динамики, допускающая три различных семейства квазиинвариантов, получа-

емых из классической недивергентной формы записи системы газодинамических уравнений [9] относительно функций плотности, скорости и энтропии. Первое семейство состоит из линейных квазиинвариантов, а второе и третье — из нелинейных, получаемых в рамках предположений, что внутри каждой элементарной ячейки разностной сетки постоянны плотность или энтропия газа. Несмотря на очевидную аналогию в способе построения, эти нелинейные квазиинварианты отличаются от тех, которые были получены в [1] для политропного газа. Каждому семейству квазиинвариантов, построенных в настоящей работе, соответствует своя модификация схемы SABARET. Проведен сравнительный анализ точности этих модификаций при расчете задачи Сода о распаде разрыва в политропном газе, в точном решении которой течение газа является дозвуковым. На основе этого анализа выделено оптимальное семейство квазиинвариантов, позволяющее схеме SABARET с высокой точностью локализовать сильные и слабые разрывы точного решения.

## 1. Стандартная схема SABARET

Рассмотрим строго гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(x, t)$  — искомая, а  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  — заданная гладкая вектор-функция, содержащая  $m$  компонент. Строгая гиперболическость системы (1) означает [7], что все собственные значения  $\lambda_i(\mathbf{u})$  матрицы Якоби  $A(\mathbf{u}) = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$  этой системы действительны и различны, в силу чего соответствующие им левые собственные векторы  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})$  образуют базис в пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Поставим для системы (1) задачу Коши с начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad (2)$$

и предположим, что эта задача имеет единственное решение в классе кусочно-непрерывных функций с устойчивыми сильными разрывами. Будем также предполагать, что на точном решении  $\mathbf{u}$  задачи Коши (1), (2) каждое собственное значение  $\lambda_i(\mathbf{u})$  системы (1) является знакоопределенным, т. е.  $\lambda_i(\mathbf{u}(x, t)) \leq 0$  или  $\lambda_i(\mathbf{u}(x, t)) \geq 0$  при всех значениях  $(x, t)$ .

Схему SABARET, аппроксимирующую задачу Коши (1), (2), будем строить на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (3)$$

в которой  $h$  — постоянный шаг сетки по пространству, а  $\tau_n$  — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости Куранта

$$\tau_n = \frac{zh}{\max_{i,j} |\lambda_i(\mathbf{v}_{j+1/2}^n)|}, \quad z \in (0, 1).$$

В этой схеме используются потоковые  $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}(x_j, t_n)$  и консервативные  $\mathbf{v}_{j+1/2}^n = \mathbf{v}(x_{j+1/2}, t_n)$  переменные, заданные в целых  $x_j$  и полуцелых  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  узлах разностной сетки.

Пусть  $\mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1/2}^n$  — известное численное решение задачи (1), (2) на  $n$ -м временном слое  $t_n$ , при  $n = 0$  — следующая аппроксимация начальной функции

$$\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{u}_0(x_j), \quad \mathbf{v}_{j+1/2}^0 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_j^0 + \mathbf{v}_{j+1}^0).$$

Численное решение  $\mathbf{v}_j^{n+1}$ ,  $\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}$  получается по стандартной схеме CABARET [1] в три этапа. На первом этапе вычисляются консервативные переменные

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{v}(x_{j+1/2}, t_{n+1/2}) = \mathbf{v}_{j+1/2}^n - r_n (\mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^n)),$$

где  $r_n = \tau_n/(2h)$ , на полуцелом временном слое  $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ . На втором этапе при помощи метода квазиинвариантов, описанного в следующих двух разделах, находятся потоковые переменные  $\mathbf{v}_j^{n+1}$ , которые используются на третьем этапе для вычисления консервативных переменных

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} - r_n (\mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1}^{n+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^{n+1}))$$

на  $(n+1)$ -м временном слое.

## 2. Метод квазиинвариантов

Зададим невырожденное преобразование  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ , где  $|\mathbf{g}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})| \neq 0$ , вектора базисных переменных  $\mathbf{u}$  системы (1), при помощи которого запишем эту систему в следующей недивергентной форме:

$$\hat{\mathbf{u}}_t + \hat{A}(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}_x = 0, \quad (4)$$

в которой

$$\hat{A}(\mathbf{u}) = G^{-1}(\mathbf{u})A(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}))G(\mathbf{u}), \quad A(\mathbf{u}) = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}), \quad G(\mathbf{u}) = \mathbf{g}_{\mathbf{u}}^{-1}(\mathbf{u}),$$

где  $G^{-1}$  — матрица, обратная к матрице  $G$ , а  $\mathbf{g}^{-1}$  — вектор-функция, обратная к  $\mathbf{g}$ . При  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  и  $\hat{A}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u})$  получаем стандартную недивергентную форму записи системы (1). Собственные значения  $\hat{\lambda}_i(\hat{\mathbf{u}})$  и левые собственные векторы  $\hat{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{u}})$  матрицы  $\hat{A}(\hat{\mathbf{u}})$  инвариантны относительно преобразования  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  в смысле выполнения соотношений  $\lambda_i(\mathbf{u}) = \hat{\lambda}_i(\mathbf{g}(\mathbf{u}))$  и  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{l}}^i(\mathbf{g}(\mathbf{u}))$ . Отсюда следует, что если дифференциальная форма  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  интегрируема и система (1) имеет инвариант  $w_i(\mathbf{u})$ , то дифференциальная форма  $\hat{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{u}})d\hat{\mathbf{u}}$  системы (4) также интегрируема и ее инвариант  $\hat{w}_i(\hat{\mathbf{u}}) = w_i(\mathbf{g}^{-1}(\hat{\mathbf{u}}))$ . Однако при  $m \geq 3$  дифференциальные формы  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  системы (1) в общем случае неинтегрируемы [9], поэтому в алгоритме схемы CABARET необходимо использовать квазиинварианты системы (1), метод построения которых существенно зависит от преобразования  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ . С учетом этого зафиксируем систему (4), получаемую в результате такого преобразования, и рассмотрим некоторую ее дифференциальную форму  $\hat{\mathbf{l}}^i(\hat{\mathbf{u}})d\hat{\mathbf{u}}$ , при записи которой далее в этом разделе и в разд. 3 тильду над переменными для краткости будем опускать.

Если дифференциальная форма  $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  неинтегрируема, то может существовать такой вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_s^i)$ , где  $s \leq m$ , состоящий из некоторых компонент вектора  $\mathbf{u}$ , что интегрируемой является дифференциальная форма  $\mathbf{l}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}])d\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}_c$  — произвольный постоянный вектор, а  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_{m-s}^i)$  — вектор, состоящий из тех компонент вектора  $\mathbf{u}$ , которые не вошли в вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}]$ . Функцию  $w_i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \mathbf{u})$ , получаемую в результате такого интегрирования, будем называть квазиинвариантом системы (4) порядка  $s$ . При этом система (4) может иметь  $C_m^s$  различных квазиинвариантов порядка  $s$ , где  $C_m^s$  — биномиальный коэффициент.

Покажем, что система (4) при  $m \geq 2$  всегда допускает квазиинвариаты порядков  $s = m, m - 1, m - 2$ . При  $s = m$  вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$  и соответствующие дифференциальные формы  $\mathbf{I}^i(\mathbf{u}_c)d\mathbf{u}$  являются линейными, где  $\mathbf{u}_c$  — постоянный вектор  $m$ -го порядка. В этом случае получаем линейные квазиинвариаты  $w_i = \mathbf{I}^i(\mathbf{u}_c)\mathbf{u}$ , которые определяются однозначно и представляют собой инвариаты линейной системы

$$\mathbf{u}_t + A(\mathbf{u}_c)(\mathbf{u})_x = 0,$$

получаемой в линейном приближении относительно постоянного решения  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$ . При  $s = m - 1$  имеем  $m$  различных наборов квазиинвариантов

$$w_i^k = \sum_{j \neq k} l_j^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], u_k) u_j + \int l_k^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], u_k) du_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

получаемых путем интегрирования дифференциальных форм  $\mathbf{I}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], u_k)d\mathbf{u}$ , в которых вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}]$  состоит из всех компонент вектора  $\mathbf{u}$ , за исключением  $u_k$ . При  $s = m - 2$  получаются дифференциальные формы  $\mathbf{I}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], u_k, u_n)d\mathbf{u}$ , в которых вектор  $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}]$  состоит из всех компонент вектора  $\mathbf{u}$ , за исключением  $u_k$  и  $u_n$ . Интегрирование таких дифференциальных форм сводится к интегрированию дифференциальных форм второго порядка, зависящих от компонент  $u_k$  и  $u_n$  вектора  $\mathbf{u}$ . В результате получаем  $m(m - 1)$  различных наборов квазиинвариантов  $(m - 2)$ -го порядка.

Если дифференциальная форма  $\mathbf{I}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  интегрируема и система (1) имеет классический инвариат  $w_i$ , то далее для единообразия формулировок будем называть его квазиинвариантом нулевого порядка. С учетом этого для каждого  $i$ -го характеристического направления системы (1), где  $i = \overline{1, m}$ , зададим квазиинвариат  $w_i$ , который используется на втором этапе численного алгоритма схемы SABARET. В результате формируется вектор квазиинвариантов

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m) = \mathbf{W}(\mathbf{u}),$$

относительно которого будем предполагать, что преобразование  $\mathbf{W}(\mathbf{u})$  является невырожденным, т. е.  $|\mathbf{W}_{\mathbf{u}}| \neq 0$ .

### 3. Вычисление потоков на втором этапе

На втором этапе численного алгоритма вычисляются значения квазиинвариантов системы (1) в целых узлах  $(n + 1)$ -го временного слоя. Опишем процедуру этого вычисления для некоторого квазиинварианта  $w_i$  (для краткости индекс  $i$  опускаем). Сначала для каждой ячейки разностной сетки (3) находятся значения

$$(w_r)_j^n = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_j^n), \quad (w_l)_{j+1}^n = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1}^n), \quad w_{j+1/2}^{n+1/2} = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad (6)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{j+1/2}^{n+1/2} = \bar{\mathbf{u}} \left[ \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} \right]$ . При этом в каждом целом узле  $j$  определены два значения квазиинварианта  $(w_r)_j^n$  и  $(w_l)_j^n$ , вычисляемые в ячейках, расположенных справа и слева от узла  $j$ . При помощи значений (6) определяются величины

$$(\bar{w}_r)_j^{n+1} = 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - (w_l)_{j+1}^n, \quad (\bar{w}_l)_{j+1}^{n+1} = 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - (w_r)_j^n. \quad (7)$$

Следуя [1], величины (7) при помощи функции

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u \leq m, \\ M, & u \geq M, \end{cases}$$

корректируются по формулам

$$(w_r)_j^{n+1} = F((\bar{w}_r)_j^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n), \quad (w_l)_j^{n+1} = F((\bar{w}_l)_j^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n),$$

в которых

$$m_{j+1/2}^n = \min((w_r)_j^n, w_{j+1/2}^n, (w_l)_{j+1}^n), \quad M_{j+1/2}^n = \max((w_r)_j^n, w_{j+1/2}^n, (w_l)_{j+1}^n),$$

где  $w_{j+1/2}^n = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1/2}^n)$ .

Значение квазиинварианта  $w_j^{n+1}$  вычисляется по формуле

$$w_j^{n+1} = \begin{cases} (w_l)_j^{n+1}, & \lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \geq 0, \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0, \\ (w_r)_j^{n+1}, & \lambda_{j-1/2}^{n+1/2} < 0, \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} = \lambda(\mathbf{v}_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} = \lambda(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2})$$

— скорости характеристик в центрах ячеек, примыкающих к узлу  $j$ . После вычисления вектора квазиинвариантов  $\mathbf{w}_j^{n+1}$  по формуле  $\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{w}_j^{n+1})$ , где  $\mathbf{W}^{-1}$  — вектор-функция, обратная к  $\mathbf{W}$ , определяется вектор потоковых переменных  $\mathbf{v}_j^{n+1}$  на  $(n+1)$ -м временном слое.

#### 4. Система уравнений газовой динамики

В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему уравнений неизотропической газовой динамики [7, 9], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\rho$ ,  $u$  и  $e = \varepsilon + u^2/2$  — плотность, скорость и полная энергия;

$$p = p(\rho, S), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, S) \quad (9)$$

— давление и внутренняя энергия, задаваемые уравнениями состояния нормального газа, которые удовлетворяют основному термодинамическому тождеству

$$TdS = d\varepsilon + pdV \quad (10)$$

( $S$  — энтропия,  $T$  — температура и  $V = 1/\rho$  — удельный объем). С учетом уравнений (9) и (10) систему (1), (8) можно записать [7] в недивергентной форме (4), где

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ S \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(\hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ a & u & b \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$a = a(\rho, S) = \frac{p_\rho(\rho, S)}{\rho}, \quad b = b(\rho, S) = \frac{p_S(\rho, S)}{\rho}.$$

При условиях  $\rho > 0$ ,  $p > 0$  и  $p_\rho > 0$  система (4), (11) является строго гиперболической и допускает запись в классической характеристической форме

$$\mathbf{I}^i \hat{\mathbf{u}}_t + \lambda_i \mathbf{I}^i \hat{\mathbf{u}}_x = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c \quad (13)$$

— собственные значения матрицы  $A(\hat{\mathbf{u}})$ ,

$$\mathbf{I}^1 = (-\alpha, 1, -\beta), \quad \mathbf{I}^2 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{I}^3 = (\alpha, 1, \beta)$$

— соответствующие им левые собственные векторы, в которых  $\alpha = c/\rho$ ,  $\beta = p_S/(\rho c)$ ,  $c = \sqrt{p_\rho}$  — скорость звука в газе. Будем предполагать, что течение газа дозвуковое и скорость этого течения неотрицательна. С учетом этого собственные значения (13) удовлетворяют неравенствам  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  и  $\lambda_3 > 0$ .

Из второго характеристического уравнения (12), имеющего вид

$$S_t + uS_x = 0,$$

следует, что энтропия газа  $S$  является инвариантом системы (4), (11), который сохраняется вдоль характеристик второго семейства (13), распространяющихся со скоростью газа  $u$ . При этом все квазиинварианты, соответствующие второму характеристическому направлению, совпадают между собой и равны инварианту  $w_2 = S$ , который мы будем использовать в схеме CABARET.

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  дифференциальных форм

$$du \mp \alpha(\rho, S)d\rho \mp \beta(\rho, S)dS, \quad (14)$$

соответствующих первому и третьему характеристическим уравнениям (12), не зависят от скорости газа  $u$ , в силу чего эти формы всегда интегрируемы, поскольку соответствующая им дифференциальная форма второго порядка

$$\alpha(\rho, S)d\rho + \beta(\rho, S)dS$$

имеет интегрирующий множитель  $\mu(\rho, S)$ , после умножения на который ее можно представить в виде полного дифференциала

$$dw(\rho, S) = \mu(\rho, S) (\alpha(\rho, S)d\rho + \beta(\rho, S)dS) \quad (15)$$

от функции  $w(\rho, S)$ . Это означает, что гиперболическая система третьего порядка (4), (11), так же как и эквивалентная ей на гладких решениях дивергентная система (1), (8), допускает полный набор инвариантов

$$w_1 = \mu u - w, \quad w_2 = S, \quad w_3 = \mu u + w. \quad (16)$$

Здесь инварианты  $w_1$  и  $w_3$  можно рассматривать как квазиинварианты первого порядка, получаемые в результате интегрирования дифференциальных форм

$$\mathbf{I}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\hat{\mathbf{u}}_c], \tilde{\mathbf{u}}_i[\hat{\mathbf{u}}])d\hat{\mathbf{u}}, \quad \bar{\mathbf{u}}_i[\hat{\mathbf{u}}] = u, \quad \tilde{\mathbf{u}}_i[\hat{\mathbf{u}}] = (\rho, S), \quad i = 1, 3.$$

Однако в общем случае интегрирующий множитель  $\mu(\rho, S)$  и интеграл  $w(\rho, S)$  дифференциальной формы (15) нельзя представить в явном виде, что не позволяет использовать инварианты  $w_1$  и  $w_3$ , задаваемые формулами (16), в алгоритме схемы CABARET. Исключением является изоэнтропическое течение, при котором энтропия газа остается постоянной во всей его области. В этом случае система уравнений газовой динамики имеет второй порядок и допускает классические инварианты Римана, которые записываются в явном виде. С учетом газогидравлической аналогии [7] монотонная модификация схемы CABARET, аппроксимирующей уравнения изоэнтропической газовой динамики с использованием инвариантов Римана, строится так же, как и при аппроксимации уравнений теории мелкой воды [6].

В схеме CABARET, аппроксимирующей систему уравнений неизоэнтропической газовой динамики (1), (8), будем использовать квазиинварианты  $w_1$  и  $w_3$  недивергентной системы (4), (11), допускающие представление в явной форме. Существует три вида таких квазиинвариантов

$$w_1 = u - w, \quad w_3 = u + w, \quad (17)$$

различающихся формулами для функции  $w$ : линейные квазиинварианты третьего порядка  $w_i = \mathbf{l}^i(\hat{\mathbf{u}}_c)\hat{\mathbf{u}}$ , для которых

$$w = \alpha(\rho_c, S_c)\rho + \beta(\rho_c, S_c)S, \quad (18)$$

и два вида нелинейных квазиинвариантов второго порядка (5), для первого из них

$$w = \alpha(\rho_c, S)\rho + B(\rho_c, S), \quad B(\rho_c, S) = \int \beta(\rho_c, S)dS, \quad (19)$$

а для второго

$$w = \beta(\rho, S_c)S + D(\rho, S_c), \quad D(\rho, S_c) = \int \alpha(\rho, S_c)d\rho. \quad (20)$$

Рассмотрим схему CABARET с инвариантом  $w_2 = S$  и тремя видами квазиинвариантов (17), в которых функция  $w$  задается по одной из трех формул (18)–(20). С учетом того, что  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_3 > 0$ , запишем алгоритм схемы на последнем шаге второго этапа, когда по формуле  $\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{w}_j^{n+1})$  вычисляется вектор потоковых переменных  $\mathbf{v}_j^{n+1} = (\rho, \rho u, \rho e)_j^{n+1}$  по известному вектору квазиинвариантов  $\mathbf{w}_j^{n+1} = (w_1, S, w_3)_j^{n+1}$ . Если применяются формулы (18) или (19), то из уравнений (17) для каждого пространственного узла  $x_j$  разностной сетки (3) получается система линейных алгебраических уравнений для определения значений  $\rho_j^{n+1}$  и  $u_j^{n+1}$ :

$$u_j^{n+1} - \alpha_{j+1/2}^{n+1/2}\rho_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1} + B_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad u_j^{n+1} + \alpha_{j-1/2}^{n+1/2}\rho_j^{n+1} = (w_3)_j^{n+1} - B_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad (21)$$

где

$$\alpha_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \alpha\left(\rho_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, S_{j\pm 1/2}^{n+1/2}\right), \quad B_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \beta\left(\rho_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, S_{j\pm 1/2}^{n+1/2}\right)S_j^{n+1}$$

в случае формулы (18) и

$$\alpha_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \alpha\left(\rho_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, S_j^{n+1}\right), \quad B_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = B\left(\rho_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, S_j^{n+1}\right)$$

в случае формул (19). Поскольку  $\alpha = c/\rho > 0$ , то определитель системы (21)

$$\Delta = \alpha_{j-1/2}^{n+1/2} + \alpha_{j+1/2}^{n+1/2} > 0,$$

что обеспечивает ее однозначную разрешимость.

Если функция  $w$ , входящая в уравнения (17), задается формулами (20), то из этих уравнений для каждого узла  $x_j$  получается нелинейное алгебраическое уравнение

$$w\left(\rho_j^{n+1}, S_j^{n+1}, S_{j+1/2}^{n+1/2}\right) + w\left(\rho_j^{n+1}, S_j^{n+1}, S_{j-1/2}^{n+1/2}\right) = (w_3)_j^{n+1} - (w_1)_j^{n+1} \quad (22)$$

для определения плотности  $\rho_j^{n+1}$ . Если уравнения состояния (9) таковы, что уравнение (22) имеет единственное решение  $\rho_j^{n+1}$ , то из формул (17) находится скорость газа

$$u_j^{n+1} = (w_1)_j^{n+1} + w\left(\rho_j^{n+1}, S_j^{n+1}, S_{j+1/2}^{n+1/2}\right) = (w_3)_j^{n+1} - w\left(\rho_j^{n+1}, S_j^{n+1}, S_{j-1/2}^{n+1/2}\right). \quad (23)$$

Подставляя величины  $\rho_j^{n+1}$  и  $S_j^{n+1}$  в уравнения состояния (9), получаем значения давления газа  $p_j^{n+1}$  и его внутренней энергии  $\varepsilon_j^{n+1}$ . Подставляя величины  $\varepsilon_j^{n+1}$  и  $u_j^{n+1}$  в формулу  $e = \varepsilon + u^2/2$ , находим значение полной энергии газа  $e_j^{n+1}$ . На этом завершается второй этап алгоритма схемы CABARET, аппроксимирующей уравнения газовой динамики (1), (8) с уравнениями состояния общего вида (9).

Для политропного газа [9] уравнения состояния (9) можно представить в виде

$$p = \varphi(S)\rho^\gamma, \quad \varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} = \frac{\varphi(S)\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}, \quad \varphi(S) = e^{CS}, \quad C = \frac{\gamma-1}{R}, \quad (24)$$

где  $\gamma > 1$  — показатель адиабаты и  $R \approx 8.3$  — газовая постоянная. В этом случае скорость звука в газе  $c = \sqrt{p_\rho} = \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}\varphi(S)}$ , в силу чего функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $B$  и  $D$ , входящие в формулы (18)–(20), записываются следующим образом:

$$\alpha = \frac{c}{\rho} = \sqrt{\gamma\rho^{\gamma-3}\varphi(S)}, \quad \beta = \frac{pS}{\rho c} = C\sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}\varphi(S)}{\gamma}},$$

$$B = \int \beta(\rho, S)dS = 2\sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}\varphi(S)}{\gamma}}, \quad D = \int \alpha(\rho, S)d\rho = \frac{2\sqrt{\gamma\rho^{\gamma-1}\varphi(S)}}{\gamma-1}.$$

В результате уравнение (22) принимает вид

$$\psi\left(S_j^{n+1}, S_{j-1/2}^{n+1/2}, S_{j+1/2}^{n+1/2}\right) (\rho_j^{n+1})^{(\gamma-1)/2} = (w_3)_j^{n+1} - (w_1)_j^{n+1}, \quad (25)$$

где

$$\psi\left(S_j^{n+1}, S_{j-1/2}^{n+1/2}, S_{j+1/2}^{n+1/2}\right) = \psi_1\left(S_j^{n+1}\right) \left(\psi_2\left(S_{j-1/2}^{n+1/2}\right) + \psi_2\left(S_{j+1/2}^{n+1/2}\right)\right),$$

$$\psi_1(S) = \frac{CS}{\gamma} + \frac{2}{\gamma-1}, \quad \psi_2(S) = \sqrt{\gamma\varphi(S)}.$$

Поскольку функция  $\psi > 0$ , то из уравнения (25) однозначно определяется плотность газа  $\rho_j^{n+1}$ , после чего из уравнений (23) вычисляется скорость газа  $u_j^{n+1}$ . Таким образом, в случае политропного газа (24) алгоритм схемы CABARET является корректным также при использовании квазиинвариантов (17), где функция  $w$  задается формулами (20).

Далее модификации схемы CABARET, при построении которых функция  $w$  задается по одной из трех формул (18), (19) и (20), будем называть схемами CABARET1, CABARET2 и CABARET3 соответственно.

## 5. Тестовые расчеты задачи Сода

В качестве тестового примера для уравнений газовой динамики (1), (8) с уравнениями состояния (24), где  $\gamma = 7/5$ , рассмотрим задачу Сода [10] о распаде начального разрыва со следующими кусочно-постоянными начальными данными:

$$\rho(x, 0) = \begin{pmatrix} 1, & x \leq 0, \\ 0.125, & x > 0, \end{pmatrix}, \quad p(x, 0) = \begin{pmatrix} 1, & x \leq 0, \\ 0.1, & x > 0, \end{pmatrix}, \quad u(x, 0) = 0. \quad (26)$$

Точное автомодельное решение такой задачи Римана, моделирующее дозвуковое течение газа, представляет собой ударную волну, контактный разрыв и центрированную волну разрежения, между которыми находятся области постоянного течения.

На рисунке для двух моментов времени приведено сравнение точного решения задачи (26) с результатами ее численного расчета по трем предложенным модификациям схемы CABARET на разностной сетке (3) с пространственным шагом  $h = 0.02$  и временным шагом, выбираемым из условия устойчивости (1), в котором  $z = 0.5$ . Из рисунка *a* следует, что в момент времени  $t = 0.06$  в схемах CABARET1 и CABARET2, в отличие от схемы CABARET3, возникают заметные нефизические осцилляции скорости и давления в области между ударной волной и волной разрежения, где расположен контактный разрыв. С течением времени при  $t = 0.3$  осцилляции затухают, в результате чего эти схемы начинают приближать аппроксимируемое решение почти с такой же точностью, как схема CABARET3 (рисунок *б*).

Для иллюстрации процесса сходимости разностных решений  $\mathbf{v}_h$  к точному решению  $\mathbf{u}$  в табл. 1 приведены ошибки разностных решений в сеточной норме  $L_1$ , вычисляемые по формуле

$$\Delta[\mathbf{v}_h] = h \sum_{j=1}^{N_h} |\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_2) - \mathbf{u}(x_{j+1/2}, t_2)|, \quad N_h = \frac{X}{h}. \quad (27)$$

Из таблицы следует, что интегральные ошибки разностного решения, получаемого по схеме CABARET3, меньше, чем по схемам CABARET1 и CABARET2. В табл. 2 приведены порядки сходимости разностных решений в сеточной норме  $L_1$ , вычисляемые по формуле Рунге

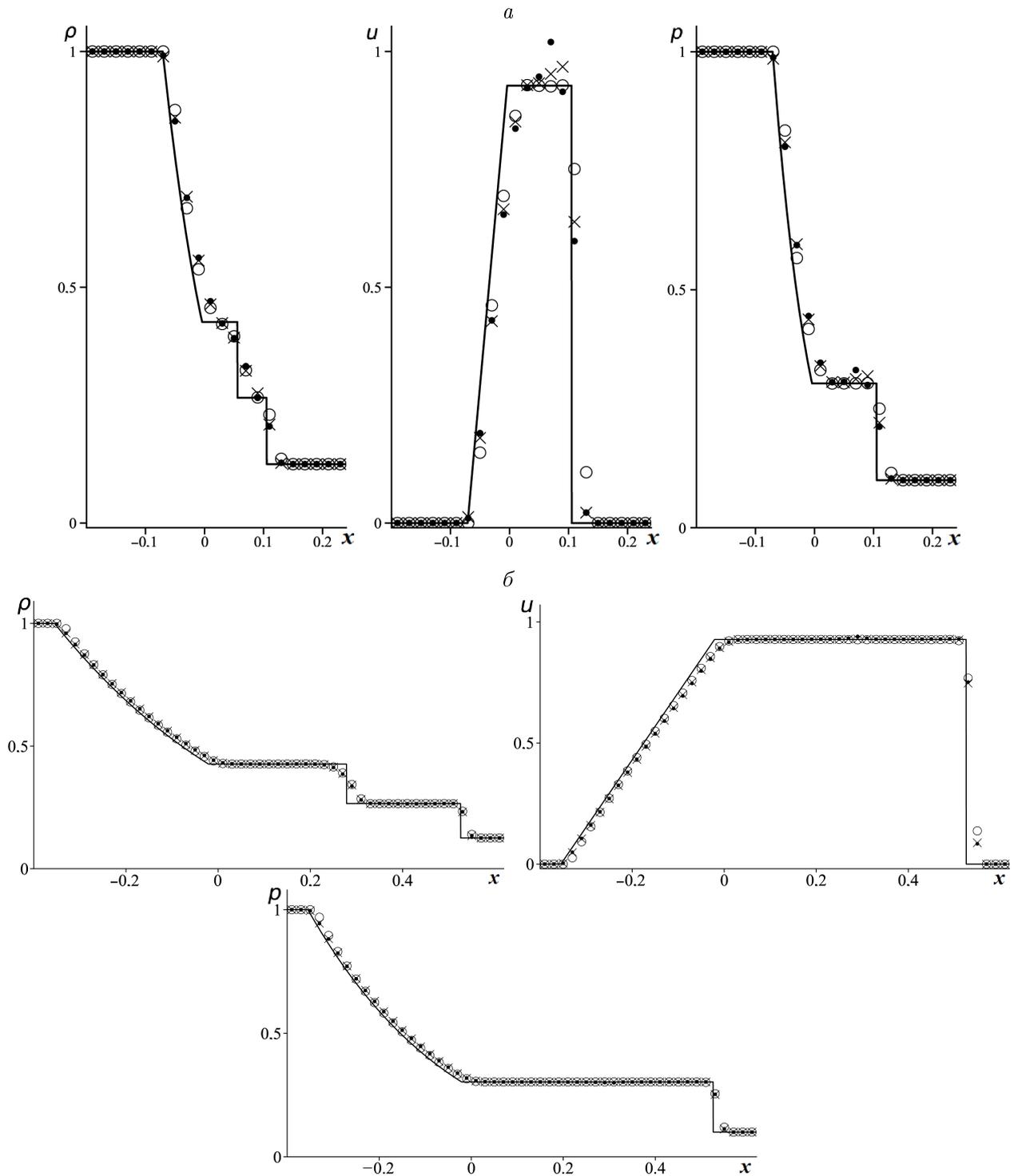
$$r_i = \log_2 \left( \frac{\Delta[\mathbf{v}_{h_i}]}{\Delta[\mathbf{v}_{h_{i+1}}]} \right), \quad h_i = \frac{h}{2^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 5, \quad (28)$$

где значения  $\Delta[\mathbf{v}_{h_i}]$  определяются по формуле (27). Из этой таблицы следует, что порядки интегральной сходимости (28) всех трех рассматриваемых схем CABARET при уменьшении пространственных шагов сетки осциллируют вокруг значения  $r = 1$ . Средние значения этих порядков

$$\bar{r} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 r_i,$$

показанные в последнем столбце табл. 2, для трех схем близки к единице.

Из приведенных в этом разделе результатов тестовых расчетов следует, что схема CABARET3 демонстрирует более высокую точность по сравнению со схемами CABARET1 и CABARET2, в силу чего (с учетом дополнительной коррекции потоков [6], повышающей ее монотонность на сильных разрывах) ее можно рекомендовать для численного моделирования более сложных газодинамических течений.



Точное (сплошная линия) и численные решения задачи Сода по схемам CABARET1 (точки), CABARET2 (крестики) и CABARET3 (кружки) на момент  $t = 0.06$  (а) и  $t = 0.03$  (б)  
 The exact (solid line) and numerical solutions of the SODA problem according to the CABARET1 (points), the CABARET2 (crosses), and the CABARET3 (circles) schemes at the time  $t = 0.06$  (a) and  $t = 0.03$  (б)

Т а б л и ц а 1. Ошибки разностных решений в норме  $L_1$  на последовательности измельчающихся сеток

Table 1. Errors of the difference solution in the  $L_1$  norm on a sequences of condensing grids

Схема	$h$						
	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.00125	0.000625	0.0003125
CABARET1	0.0500162	0.0186032	0.0121038	0.0066511	0.0025341	0.0016164	0.0008588
CABARET2	0.0513650	0.0192544	0.0125587	0.0068957	0.0026570	0.0016941	0.0009102
CABARET3	0.0497175	0.0180092	0.0118025	0.0065168	0.0024653	0.0015802	0.0008409

Т а б л и ц а 2. Порядки сходимости разностных решений в норме  $L_1$  на последовательности измельчающихся сеток

Table 2. Order of convergence of difference solution in the  $L_1$  norm on a sequence of condensing grids

Схема	$r_0$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$\bar{r}$
CABARET1	1.427	0.620	0.864	1.392	0.649	0.912	0.977
CABARET2	1.416	0.617	0.865	1.375	0.649	0.896	0.970
CABARET3	1.465	0.610	0.857	1.402	0.642	0.910	0.981

## Заключение

В настоящей работе при построении схемы CABARET, аппроксимирующей систему уравнений газовой динамики (1), (8), применялись квазиинварианты (17)–(20), получаемые из дифференциальных форм (14), соответствующих классической [9] недивергентной форме записи (4), (11) системы газодинамических уравнений. Однако, как отмечалось в разд. 2, можно построить квазиинварианты, получаемые на основе других недивергентных форм записи системы (1), (8), например когда в системе (4), (11) уравнение для энтропии заменяется на уравнение для давления [1], внутренней или полной энергии. Поэтому в дальнейшем планируется исследовать модификации схемы CABARET, при которых применяются квазиинварианты, получаемые из других, отличных от (4), (11), недивергентных форм записи системы газодинамических уравнений.

**Благодарности.** Работа выполнена по теме государственного задания ИТПМ СО РАН (AAAA-A19-119051590004-5) и при частичной финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН (грант № 21-51-53012).

## Список литературы

- [1] Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Издательство Московского государственного университета; 2013: 472.
- [2] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности двухслойной по времени схемы Кабаре. Математическое моделирование. 2012; 24(9):97–112. DOI:10.1134/S2070048213020051.
- [3] Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ в многомерном случае. Доклады Академии наук. 2015; 462(4):385–390. DOI:10.7868/S0869565215160057.

- [4] **Зюзина Н.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком. Доклады Академии наук. 2016; 466(5):513–517. DOI:10.7868/S086956521605008X.
- [5] **Остапенко В.В., Черевко А.А.** Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком. Доклады академии наук. 2017; 476(5):518–522. DOI:10.7868/S0869565217290084.
- [6] **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018; 58(9):1488–1504. DOI:10.31857/S004446690002528-1.
- [7] **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит; 2001: 607.
- [8] **Jiang G.S., Shu C.W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes. Journal of Computational Physics. 1996; (126):202–228. DOI:10.1006/jcph.1996.0130.
- [9] **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука; 1978: 688.
- [10] **Sod G.A.** A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics. 1978; (27):1–31. DOI:10.1016/0021-9991(78)90023-2.
- [11] **Остапенко В.В., Колотилов В.А.** Применение схемы CABARET для расчета разрывных решений гиперболической системы законов сохранения. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021; 501(1):62–66. DOI:10.31857/S2686954321060126.

## Method of quasi-invariant in CABARET schemes and its application for numerical calculation of gas dynamics problems

KOLOTILOV VADIM A.<sup>1,2,3,\*</sup>, OSTAPENKO VLADIMIR V.<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

<sup>3</sup>Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Kolotilov Vadim A., e-mail: kolotilov1992@gmail.com

Received July 13, 2022, revised November 25, 2022, accepted December 20, 2022.

### Abstract

We consider detailed description of the quasi-invariants method for constructing a CABARET scheme approximating a hyperbolic system of conservation laws that cannot be written in the form of invariants. A classification of quasi-invariants with respect to their non-linear dependence on the desired functions for the corresponding non-divergent notation of the approximated system and describe a method for obtaining quasi-invariants of a given order of nonlinearity is presented. The algorithm of the resulting CABARET scheme is given for the unidirectional case when in the speed of the calculated exact solution the characteristics of one family does not change sign. As a specific example, we have considered the conservation laws system of non-isoentropic gas

dynamics that admits three different families of quasi-invariants obtained from the classical non-divergent form of this system for the density, velocity, and entropy functions. Each family of these invariants corresponds to its own modification of the CABARET scheme. A comparative analysis for the accuracy of these modifications applied for calculation of the Sod problem on the initial discontinuity decay in a polytropic gas is carried out. On the basis of this analysis, the optimal form of quasi-invariants has been identified, which allows localizing strong and weak discontinuities of the exact solution with high accuracy using the CABARET scheme.

*Keywords:* CABARET scheme, method of quasi-invariants, equations of gas dynamic.

*Citation:* Kolotilov V.A., Ostapenko V.V. Method of quasi-invariant in CABARET schemes and its application for numerical calculation of gas dynamics problems. Computational Technologies. 2023; 28(2):58–71. DOI:10.25743/ICT.2023.28.2.006. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The work was partly supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment (AAAA-A19-119051590004-5) and partly supported by RFBR and NSFC, grant No 21-51-53012.

### References

1. **Goloviznin V.M., Zaytsev M.A., Karabasov S.A., Korotkin I.A.** Novye algoritmy vychislitel'noy gidrodinamiki dlya mnogoprotessornykh vychislitel'nykh kompleksov [New CFD algorithms for multiprocessor computer systems]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta; 2013: 472. (In Russ.)
2. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** On monotonicity of two-layer in time cabaret scheme. Mathematical Models and Computer Simulations. 2013; (5):180–189. DOI:10.1134/S2070048213020051.
3. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** On the monotonicity of the CABARET scheme in the multidimensional case. Doklady Mathematics. 2015; 462(4):385–390. DOI:10.1134/S1064562415030217.
4. **Zyuzina N.A., Ostapenko V.V.** On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux. Doklady Mathematics. 2016; 93(1):69–73. DOI:10.1134/S1064562416010282.
5. **Ostapenko V.V., Cherevko A.A.** Application of the CABARET scheme for calculation of discontinuous solutions of the scalar conservation law with nonconvex flux. Doklady Physics. 2017; 62(10):470–474. DOI:10.1134/S1028335817100056.
6. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** Monotonicity of the CABARET scheme approximating a hyperbolic system of conservation laws. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018; 58(9):1435–1450. DOI:10.1134/S0965542518090129.
7. **Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton FL. 2001; 540. ISBN:0-8493-0608-6.
8. **Jiang G.S., Shu C.W.** Efficient implementation of weighted ENO schemes. Journal of Computational Physics. 1996; (126):202–228. DOI:10.1006/jcph.1996.0130.
9. **Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.** Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics. Defense Technical Information Center; 1972: 668.
10. **Sod G.A.** A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics. 1978; (27):1–31. DOI:10.1016/0021-9991(78)90023-2.
11. **Ostapenko V.V., Kolotilov V.A.** Application of the CABARET scheme for calculating discontinuous solutions of a hyperbolic system of conservation laws. Doklady Mathematics. 2021; 104(3):369–373. DOI:10.1134/S1064562421060120.